BAREME

CLASA A V-A – PROBLEMA 1

Numărul A se poate scrie ca:

$$A=11\cdot10^{2004}+\overline{1ab}\cdot10^{2001}+\overline{1ab}\cdot10^{1998}+...+\overline{1ab}\cdot10^{6}+11110=$$ **1 p**

$$=11\cdot10^{2004}+\overline{1ab}(10^{6}+10^{9}+10^{12}+...+10^{2001})+11\cdot10\cdot101=11\cdot10\cdot(101+10^{2003})+$$ **1 p**

$$+\overline{1ab}\cdot10^{6}(1+10^{3}+10^{6}+...+10^{1995})=11\cdot10\cdot(101+10^{2003})+\overline{1ab}\cdot10^{6}\cdot[(1+10^{3})+(10^{6}+10^{9})+...+$$

$$+(10^{1992}+10^{1995})]=11\cdot10\cdot(101+10^{2003})+\overline{1ab}\cdot10^{6}(1001+1001\cdot10^{6}+...+1001\cdot10^{1992})=$$ **1 p**

$$=11\cdot10(101+10^{2003})+\overline{1ab}\cdot1001\cdot10^{6}(1+10^{6}+10^{12}+...+10^{1992})=$$

1 p

$$=11\cdot10\cdot(101+10^{2003})+\overline{1ab}\cdot7\cdot11\cdot13\cdot10^{6}(1+10^{6}+10^{12}+...+10^{1992})=$$

$$=11[10\cdot(101+10^{2003})+\overline{1ab}\cdot7\cdot13\cdot10^{6}(1+10^{6}+10^{12}+...+10^{1992})]$$ **1 p**

Notăm $k=10(101+10^{2003})+\overline{1ab}\cdot7\cdot13\cdot10^{6}(1+10^{6}+10^{12}+...+10^{1992}), k\in N^{*}$. **1 p**

Am obținut $A=11\cdot k, k\in N^{*}$, deci A este multiplu de 11 . **1 p**

NOTĂ: Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, va fi punctată corespunzător.

CLASA A V-A – PROBLEMA 2

a) În şirul de numere naturale din enunţ, apar:

1 număr de 1
2 numere de 2
3 numere de 3
…
n numere de n
….

1 p

În general, pentru a afla ce număr se află pe o anumită poziție, vom afla mai întâi ce numere naturale distincte se află înaintea lui. Vom începe prin a afla câte poziții sunt ocupate de numerele 1, 2, 3, … n:

1(nr. de 1)+2(nr. de 2)+3(nr. de 3)+ … + n(nr. de n) = $\frac{n\ \ n+1}{2}$ poziții.

1 p

Trebuie să găsim cel mai mare număr natural n pentru care $\frac{n\ \ n+1}{2}$<2006.

Pentru n=62, $\frac{n\ \ n+1}{2}$ =1953

Pentru n=63, $\frac{n\ \ n+1}{2}$ =2016.

1 p

Prin urmare, n=62. Al 1953-lea număr din şir este 62 iar apoi urmează 63 de 63 de ori. Al 2006-lea număr din şir este 63 (al 53-lea număr de 63).

1 p

b) Suma primelor 2006 numere se calculează însumând:

1 număr de 1 =1

2 numere de 2 = 2^2

3 numere de 3 = 3^2

1 p

…

62 numere de 62 = 62^2

53 numere de 63 = $53 \cdot 63$

şi adunând apoi 3.

Studiem care este ultima cifră a numărului S+3.

U(1)=1, U(2^2)=4, U(3^2)=9, U(4^2)=6, U(5^2)=5, U(6^2)=6, U(7^2)=9, U(8^2)=4, U(9^2)=1, U(10^2)=0. De aici, ultima cifră a sumei $1+2^2+3^2+ \ldots +10^2$ este 5.

Tot 5 va fi ultima cifră a sumelor $11^2+12^2+ \ldots+20^2$, $21^2+22^2+\ldots+30^2$, $31^2+32^2+\ldots+40^2$, $41^2+42^2+\ldots+50^2$, $51^2+52^2+\ldots+60^2$.

1 p

U(S+3) = U($5+5+5+5+5+5+61^2+62^2+63 \cdot 53+3$) = U(1+4+9+3) = 7.

Cum ultima cifră a numărului S+3 este 7, acesta nu poate fi pătrat perfect.

1 p

NOTĂ: Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, va fi punctată corespunzător.

CLASA A V-A – PROBLEMA 3

card(1, 2) = 2

card(2, 4) = 3

$\boxed{\textbf{2 p}}$

card(3, 6) = 4

…

card(k, 2k) = k+1

…

card(1003, 2006) = 1004

$\boxed{\textbf{1 p}}$ $\boxed{\textbf{1 p}}$

Suma cerută în problemă este S = 2 + 3 + 4 + … + 1004 = 1 + 2 + 3 + 4 + … + 1004 – 1 = $\dfrac{1004 \cdot 1005}{2}$ - 1 = 504510 – 1 = 504509 = 17 · 29677.

$\boxed{\textbf{1 p}}$ $\boxed{\textbf{1 p}}$

Prin urmare, S este multiplu de 17. $\boxed{\textbf{1 p}}$

NOTĂ: Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, va fi punctată corespunzător.

CLASA A V-A – PROBLEMA 4

Fie n număr natural nenul. Considerăm numerele

$A_1 = 50$

$A_2 = 5050$ **1 p**

$A_3 = 505050$

…

$A_n = 5050 \ldots 50$ (gruparea de cifre 50 apare de n ori).

Resturile posibile la împărțirea unui număr natural la numărul n sunt 0, 1, 2, … , n-1. **1 p**

Dacă printre cele n numere considerate mai sus (A_1, A_2, …, A_n) există unul care să dea restul 0 la împărțirea la n, atunci problema este rezolvată. **1 p**

Presupunem acum că, printre cele n numere de mai sus, nu există nici unul care, împărțit la n, să dea restul 0.

Așadar, avem n numere naturale distincte care, la împărțirea la n pot da resturile 1, 2, … , n-1. Va rezulta că cel puțin două din aceste n numere dau acelaşi rest la împărțirea la n. Fie acestea A_k şi A_p, cu $k > p$. **1 p**

Conform teoremei împărțirii cu rest:

$A_k = n \cdot B + r$, $B \in N$, $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ **1 p**

$A_p = n \cdot C + r$, $C \in N$, $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

$B > C$

Atunci $A_k - A_p = n(B - C) \Rightarrow A_k - A_p$ este multiplu de n, iar $A_k - A_p$ este scris doar cu cifrele 5 şi 0, deoarece: **1 p**

$A_k = 5050\ldots50$ (k grupe formate din 50)

$A_p = 5050\ldots50$ (p grupe formate din 50) şi cum $k > p \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_k - A_p = \underbrace{5050...50}_{k-p \text{ grupe de } 50}\ \underbrace{0000...00}_{p \text{ grupe de } 00}$$ **1 p**

NOTĂ: Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, va fi punctată corespunzător.